

## Wprowadzenie

Obserwowany w ostatnim okresie burzliwy rozwój technologii wytwarzania materiałów i konstrukcji postawił nowe problemy teoretyczne. Szczególnie energetyka tych procesów i złożone powiązania towarzyszących im przepływów masy, pędu, ładunku elektrycznego i energii wymagały stworzenia ogólnej teorii, która łączyłaby we wspólną całość *mechanikę ośrodków ciągłych* (MOC) i *termodynamikę procesów nieodwracalnych*. Taką teorią jest powstała przed trzydziestu laty *termomechanika*. Stworzone w ramach tej teorii modele i metody postępowania pozwalają racjonalnie przewidywać własności nowych materiałów i wykonanych z nich konstrukcji - tak w trakcie projektowania jak i eksploatacji. Jej zastosowania w szczególnych dyscyplinach jak *inżynieria materiałowa*, *teoria konstrukcji* są dzisiaj zasadnicze i ciągle rosnące. Szczególnie zachęcająca do zastosowań jest tu sytuacja, kiedy mówi się nie tylko o zachodzących w trakcie procesu przemianach energetycznych i struktury materiału, ale również określa się mechanizmy dyssypacji energii oraz sposoby sterowania tymi procesami.

Historycznie rzecz biorąc zapowiedzią termomechaniki była już termosprężystość. Następnie pojawiła się teoria pól sprzężonych oraz opisy ośrodków wieloskładnikowych, a wśród nich termodyfuzja w ośrodku odkształcalnym. Prace z tego zakresu przed ćwierćwieczem prowadziliśmy również w Opolu. Najpierw były to prace teoretyczne a później zastosowania. Dzisiaj stanowią one fragmenty termomechaniki podobnie jak inne propozycje z teorii pól sprzężonych.

Nieodzownym elementem tych rozważań jest *ośrodek wieloskładnikowy*, co wynika m.in. z potrzeby opisu procesów technologicznych. Istotnie, w trakcie typowych procesów wytwarzania przepływy różnych form energii prowadzą do przemian elementów struktury materiału. W postaci krańcowej będą to przemiany fazowe z tworzeniem nowej struktury oraz reakcje chemiczne w fazie stałej, a w najprostszej - zmiany własności materiału.

W każdym z wymienionych przypadków należy wprowadzić pojęcia typowe dla ośrodka wieloskładnikowego. Tak też postąpiono w niniejszym opracowaniu, gdzie trzeci rozdział poświęcono temu ujęciu wygodnemu do analizy tej szerokiej klasy zagadnień termomechaniki na użytek technologii.

Rozważania te poprzedza klasyczny zarys MOC, a zadania brzegowe obejmują ciała sprężyste. Dodajmy, iż jest to ta część mechaniki, która nie wymaga pogłębionej znajomości energetyki procesów deformacji.

Natomiast opis własności plastycznych, reologicznych oraz narastania uszkodzeń wymaga również uwzględnienia mechanizmów dyssypacji energii z układu. Należy wówczas czysto mechaniczne ujęcie problemu rozszerzyć na termomechaniczne. Wynika stąd też nieodzowność szerszego spojrzenia na problemy klasycznej mechaniki konstrukcji.

Typowy *model termomechaniczny* zawiera jako składowe modele kinetyki i dynamiki procesu, które są powiązane ściśle z opisem przepływów energii oraz mechanizmami jej dyssypacji. W konsekwencji zastosowanie termomechaniki wymaga:

- *określenia typowego fragmentu struktury materiału, ilości składników oraz powiązań między nimi,*
- *zbudowania modelu oddziaływań i przepływów masy, pędu, ładunku, energii i entropii,*
- *sformułowania dla określonego modelu i typu oddziaływań bilansów procesu, a w tym parcjalnych i sumarycznych bilansów masy, ładunku, pędu, krętu, energii i entropii,*
- *określenia historii procesu oraz głównych funkcjonałów termodynamicznych łącznie z wynikającymi z nich równaniami konstytutywnymi,*
- *sformułowania zadań brzegowych procesu na podstawie znajomości równań konstytutywnych, bilansów oraz warunków początkowo - brzegowych,*
- *podania rozwiązania analitycznego zadania brzegowego lub też zbudowania odpowiedniej procedury obliczeń numerycznych najczęściej z wykorzystaniem wariacyjnych ujęć problemu, np. MES.*

Naszkieowany tu program uniwersalnego postępowania znalazł zastosowanie w wielu, często bardzo odległych, działach współczesnej techniki i technologii. Korzystano z niego zarówno w mechanice konstrukcji jak i przy wytwarzaniu kompozytów, biomateriałach i in. Technolodzy otrzymali bardzo skuteczną metodę postępowania przy projektowaniu i sterowaniu procesami wytwarzania materiałów. Sądzę więc, iż warto studentom inżynierii przedstawić podstawowe idee tej dyscypliny wiedzy.

Przedstawiony wykład termomechaniki był prezentowany od kilkunastu lat studentom specjalności teoretycznych na Politechnice Śląskiej i Opolskiej, a głównie na studium doktoranckim. Praca natomiast powstała w Katedrze Fizyki Materiałów Politechniki Opolskiej, gdzie w trakcie prowadzonego przeze mnie seminarium z termomechaniki były dyskutowane podstawy jak i jej zastosowania, za co składam podziękowania.

## Rozdział I

## ELEMENTY MECHANIKI OŚRODKA CIĄGŁEGO

## 1. Wstęp

W prezentowanym ujęciu MOC podajemy najpierw pojęcia pierwotne. Są nimi zarówno pojęcia ośrodka ciągłego, jego gęstości oraz układu sił (masowych i powierzchniowych) jak i współzależności zachodzące między ruchem a siłami. Pojęcia te w zasadzie pozwalają formułować tylko sprężyste zadania mechaniki ośrodków ciągłych. Natomiast do opisu niesprężystych cech materiałów trzeba dodatkowo wprowadzić pojęcia ciepła i jego przepływów, a także energii wewnętrznej, entropii i temperatury, co uczynimy w kolejnym rozdziale, wprowadzając ujęcia typowe dla termomechaniki.

Ośrodek ciągły jest pewnym modelem materii i zachodzących w nim zjawisk, które nazywamy makroskopowymi. Pojęcie to może sugerować, iż ujmuje ono jedynie problemy w jakimś idealnym ośrodku ciągłym bez pęknięć, szczelin itp. Tymczasem model ten jedynie sugeruje opis zjawisk wykorzystujący pojęcie funkcji ciągłych.

## 2. Ruch ośrodka

Ruch ośrodka ciągłego w czasoprzestrzeni opisuje układ trzech równań

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{lub} \quad x_i = x_i(X_k, t) \quad (2.1)$$

określających położenie cząstki materialnej w każdej chwili czasu. Zmiennymi niezależnymi są tu położenie pierwotne cząstki materialnej i czas. Taki opis ruchu nazywamy *materialnym (Lagrange'a)*.

Do równań tych istnieje odwzorowanie odwrotne

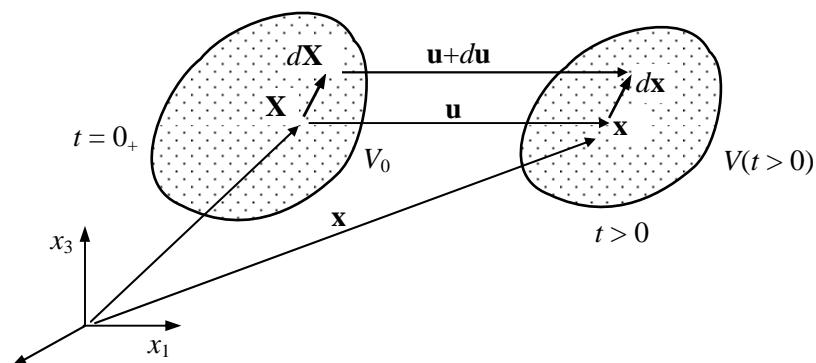
$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}(t), t) \quad \text{lub} \quad X_k = X_k(x_i, t), \quad (2.2)$$

pozwalające na równoważny - *przestrzenny opis ruchu* ośrodka. W tym przypadku zmiennymi niezależnymi będzie aktualne położenie cząstki materialnej i czas.

Uporządkowany układ liczb  $\mathbf{X} = (X_1 \ X_2 \ X_3)$  nazywamy więc współrzędnymi materialnymi (Lagrange'a), a  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – przestrzennymi (Eulera) cząstki ośrodka.

Ruch ośrodka można również zapisać równaniem

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad \text{lub} \quad u_i = x_i(X_k, t) - X_i \quad (2.3)$$



Rys. 2.1. Ruch ośrodka

Przytoczone równania w pełni określają kinematykę ośrodka.

Pole przemieszczeń  $u_k$

$$u_k = x_k - X_k \quad (2.4)$$

jest funkcją

$$\begin{aligned} u_k &= u_k(X_i, t) && \text{– w opisie Lagrange'a (opis zależny od czasu i} \\ &&& \text{położenia początkowego)} \\ u_k &= u_k(x_i(t), t) && \text{– w opisie Eulera (opis zależny od aktualnego} \\ &&& \text{położenia i czasu)} \end{aligned}$$

Natomiast wektor prędkości przemieszczeń  $v_k = v_k(x_i(t), t)$  wynosi

$$v_k = \frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \dot{u}_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v_i \approx \dot{u}_k \quad (2.5)$$

Odształcenie ciała obliczymy porównując długości wektorów  $d\mathbf{X}$  i  $d\mathbf{x}$  punktów blisko siebie położonych przed i po deformacji

$$(d\mathbf{x})^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_l} dX_i dX_l \quad , \quad (d\mathbf{X})^2 = \delta_{il} dX_i dX_l$$

Wykorzystując związek (2.4) uzyskamy

$$\begin{aligned}
 (d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 &= \left[ \left( \frac{\partial X_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \left( \frac{\partial X_k}{\partial X_l} + \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \right) - \delta_{il} \right] dX_i dX_l = \\
 &= \left( \delta_{ki} \delta_{kl} + \delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \delta_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} - \delta_{il} \right) dX_i dX_l = \quad (2.6) \\
 &= \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_l} + \frac{\partial u_l}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \right) dX_i dX_l = 2E_{il} dX_i dX_l
 \end{aligned}$$

Materialny tensor skończonych deformacji - *tensor Greena* określają więc wyrażenia w nawiasach wzoru (2.6)

$$2\mathbf{E} = \text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u} \text{ grad } \mathbf{u}$$

lub (2.7)

$$2E_{km} = \frac{\partial u_k}{\partial X_m} + \frac{\partial u_m}{\partial X_k} + \frac{\partial u_p}{\partial X_k} \frac{\partial u_p}{\partial X_m}.$$

Przypadkiem szczególnym jest tensor nieskończenie małych odkształceń

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u} \quad \text{lub} \quad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (2.7')$$

Wyszczególnione pola  $\mathbf{E}$  i  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pozwalają w pełni opisać deformacje ośrodka ciągłego.

Z kolei wektor prędkości  $\mathbf{v}$  i przyspieszenia  $\mathbf{a}$  określimy zależnościami

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} \quad (2.8)$$

a wektor prędkości deformacji  $\mathbf{d}$

$$2\mathbf{d} = \text{grad } \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v} \quad \text{lub} \quad 2d_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} \quad (2.9)$$

przy czym pełna pochodna po czasie pola przemieszczeń  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  wynosi

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (2.10)$$

Podane formuły na obliczanie pochodnych czasowych będą wykorzystywane przy analizie równań bilansów procesu.

### 3. Zasada zachowania masy

Będziemy zakładali, że rozkład masy  $m$  w dowolnym punkcie ciała to dodatnia skalarna miara, absolutnie ciągła. Jest ona addytywną funkcją objętości. Istnieje więc *gęstość*  $\rho$  jako graniczny stosunek masy  $m$  do zajmowanej przez nią objętości  $V$

$$\rho(X) = \lim_{\|V\| \rightarrow 0} \frac{m}{V} \quad (3.1)$$

Z drugiej strony masa  $m$  ciała  $\vartheta$  jest równa

$$m(\vartheta) = \int_V \rho dV \quad (3.2)$$

Natomiast *zasada zachowania masy* ma postać

$$\frac{d}{dt} m(\vartheta) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (3.3)$$

Globalna postać tej zasady prowadzi do równania

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV \quad (3.4)$$

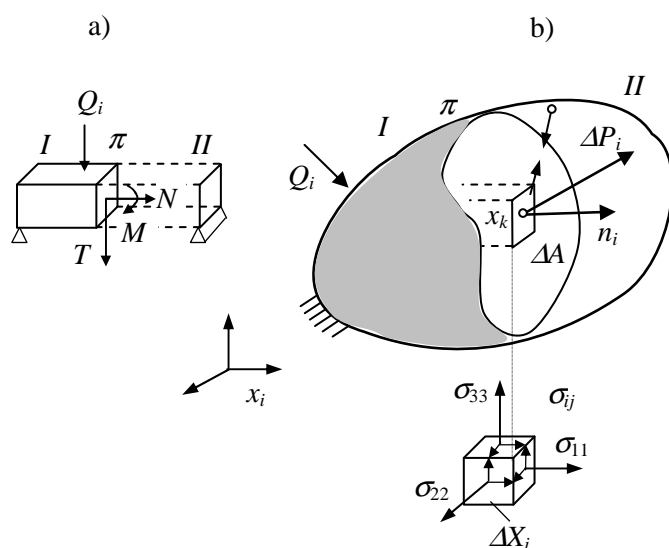
stąd jej forma lokalna

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad (3.5)$$

### 4. Wektor i tensor naprężeń

Miarą wewnętrznych sił z jakimi oddziałują cząstki materialne na siebie jest wektor naprężenia oraz wynikający z niego tensor naprężeń. Wektor naprężeń otrzymamy po umownym podziale ciała na dwie części i określeniu intensywności *siły powierzchniowej*  $P_i(x_k)$  jaka występuje w punkcie  $x_k \in A$  na powierzchni rozdziału o wektorze normalnym  $n_k$ . Sposób postępowania jest tu

podobny jak przy określaniu sił przekrojowych w klasycznej wytrzymałości materiałów (rys. 4.1a). Wektor naprężeń określa więc wyrażenie



Rys. 4.1. Wektor i tensor naprężeń

$$P_i = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_i}{\Delta A(x_k, n_k)} \quad (4.1)$$

Wektor naprężeń  $P_i$  można rozłożyć na składową normalną i styczną. Podobnie określając intensywność oddziaływań międzycząsteczkowych na płaszczyznach elementarnego prostopadłościanu o bokach  $\Delta X_1$   $\Delta X_2$   $\Delta X_3$  otrzymamy *tensor naprężeń*

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Między wektorem  $P_i$  a tensorem naprężeń  $\sigma_{ij}$  zachodzi zależność

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \quad (4.3)$$

### 5. Zasada zachowania pędu i krętu

Pojęcie siły służy zarówno do opisanego wzajemnego oddziaływania ciał na siebie jak i oddziaływań między cząstkami w ciele. Siły  $\mathbf{f}$  działające na ciało będziemy rozdzielać na *objętościowe*  $\rho\mathbf{F}$  oraz *powierzchniowe*. Ich suma wynosi

$$\mathbf{f} = \int_V \rho\mathbf{F}dV + \int_A \mathbf{P}dA \quad (5.1)$$

Dalej będziemy zakładać, iż na ciało nie działają powierzchniowe ani też objętościowe momenty. Stąd sumaryczny moment sił działających na ciało liczony względem początku układu współrzędnych ma postać

$$\mathbf{m}_0 = \int_V \mathbf{x}\xi \rho\mathbf{F}dV + \int_A \mathbf{x}\xi \mathbf{P}dA \quad (5.2)$$

Podstawowe prawa mechaniki, a więc zasada zachowania pędu i krętu, przyjmą postać

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\mathbf{v}dV = \mathbf{f} \quad \text{lub} \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = f_i \quad (5.3)$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{x}\xi \rho \mathbf{v}dV = \mathbf{m}_0 \quad \text{lub} \quad \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV = m_{i0} \quad (5.4)$$

Pełna postać *zasad zachowania pędu i krętu* ma formę

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho F_i dV + \int_A P_i dA \quad (5.5)$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho F_k dV + \int_A \varepsilon_{ijk} x_j P_k dA \quad (5.6)$$

Podane w tej formie zasady zachowania pędu i krętu są ogólnymi i podstawowymi równaniami mechaniki, stanowiącymi część termomechaniki.



## 6. Równania ruchu

Z podanych w postaci globalnej równań zasad zachowania pędu i krętu uzyskamy ich lokalną postać - czyli **równania ruchu**. Są to podstawowe równania dynamiki ośrodka ciągłego. Równania te uzyskamy wykorzystując twierdzenie *Gaussa* o zamianie całki powierzchniowej na objętościową oraz wprowadzeniu operacji różniczkowania pod znak całki. Zachodzi

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_V \rho F_i dV + \int_A \sigma_{ij} n_j dA \quad (6.1)$$

a stąd

$$\int_V \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho F_i - \sigma_{ij,j} \right) dV = 0 \quad (6.2)$$

Podana całka zaniknie, jeżeli funkcja podcałkowa jest równa zeru

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ij,j} \quad \text{lub} \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \text{div} \boldsymbol{\sigma} \quad (6.3)$$

Zależności (6.3) są poszukiwanymi równaniami ruchu. Ich szczególnym przypadkiem, kiedy  $v_i = \text{const}$ , są równania równowagi wewnętrznej.

Analogiczne postępowanie z równaniem zasady zachowania momentu pędu, czyli krętu, prowadzi do symetrii tensora naprężeń

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (6.4)$$

Występująca w równaniu ruchu pochodna czasowa ma formę

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \dot{v}_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad (6.5)$$

w której drugi składnik zawiera nieliniowość – iloczyn gradientu prędkości przez prędkość. Wielkości te dla uproszczenia rozważań będziemy często pomijali, co w konsekwencji prowadzi do linearyzacji równań mechaniki.

Istotnie, występujące w lokalnych równaniach bilansów pochodne czasowe są sumą pochodnych lokalnych oraz konwekcyjnych (pochodne materialne)

$$\frac{d(\quad)}{dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + w_i \frac{\partial(\quad)}{\partial x_i} \quad (6.6)$$

Forma tych pochodnych jest następstwem przyjętego opisu ruchu ciała, a dalej bilansów procesu, odnoszonych do aktualnej konfiguracji ciała.

### 7. Zadania brzegowe mechaniki

Podane poprzednio równania ruchu oraz wyrażenia określające tensor naprężeń w zależności od pola przemieszczeń są zasadniczymi równaniami mechaniki. Układ ten należy jeszcze uzupełnić o równania konstytutywne, które są zależnościami między tensorami naprężeń oraz odkształceń. Postać tych równań wynika z rozważań energetycznych, a występujące w nich tzw. funkcje materiałowe wyznacza się z eksperymentu.

W najprostszym, liniowo – sprężystym przypadku tensor naprężeń  $\sigma_{ij}$  z tensorem odkształceń  $\varepsilon_{kl}$  (por. (2.7')) łączy **prawo Hooke'a**

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (7.1)$$

Natomiast w nieliniowo - sprężystym ciele zachodzi podobna zależność dla przyrostów tensorów  $\Delta\sigma_{ij}$  i  $\Delta\varepsilon_{kl}$

$$\Delta\sigma_{ij} = E_{ijkl}^*(\varepsilon_{kl} \dots) \Delta\varepsilon_{kl} \quad 2\Delta\varepsilon_{kl} = \Delta u_{k,l} + \Delta u_{l,k} \quad (7.1')$$

gdzie  $E_{ijkl}$  jest tensorem stałych materiałowych, a podane równania odnoszą się do ciała anizotropowego.

Klasyczne oraz przyrostowe zadania brzegowe mechaniki mają postać

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ij,j} \quad \rho \frac{d\Delta v_i}{dt} = \rho \Delta F_i + \Delta\sigma_{ij,j} \quad (7.2)$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad 2\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} \quad (7.3)$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^*(\varepsilon_{kl} \dots) \varepsilon_{kl} \quad \Delta\sigma_{ij} = E_{ijkl}^*(\varepsilon_{kl}) \Delta\varepsilon_{kl} \quad (7.4)$$

Po podstawieniu równań (7.3) i (7.4) do (7.2) otrzymamy układ **równań przemieszczeniowych mechaniki**

$$E_{ijkl}u_{k,lj} + \rho F_i = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad E_{ijkl}\Delta u_{k,lj} + \rho \Delta F_i = \rho \frac{d\Delta v_i}{dt} \quad (7.5)$$

Do podanych wyżej równań należy dołączyć warunki początkowe

$$v_i(x_i, t = 0_+) = v_{i0} \quad u_i(x_i, t = 0_+) = u_{i0} \quad (7.6)$$

oraz brzegowe

$$\sigma_{ij;n_j}|_{A_\sigma} = P_i, \quad u_i|_{A_u} = \overset{\circ}{u}_i \quad \text{lub} \quad \Delta \sigma_{ij;n_j}|_{A_\sigma} = \Delta P_i, \quad \Delta u_i|_{A_u} = \overset{\circ}{\Delta u}_i \quad (7.7)$$

Otrzymaliśmy tu najprostsze zadania MOC – równania teorii sprężystości, które nie wymagają rozważań energetycznych. Jest to sytuacja wyjątkowa, natomiast złożone problemy przemian energetycznych występujących w technologiach wytwarzania i eksploatacji materiałów i konstrukcji wymagają kolejnych rozszerzeń i modyfikacji klasycznej mechaniki m. in. o opisy przemian fazowych i oddziaływań natury niemechanicznej.

### Zagadnienia

1. Określić współrzędne tensora odkształceń Greena w płaskim stanie deformacji, kiedy  $u_k = u_k(x_i, t)$  i,  $k = 1, 2$ .

2. Wyznaczyć podstawowe niezmienniki tensora odkształceń Greena  $E_{ij}$ ,  $I_E = E_{ii}$ ,  $II_E = E_{ij}E_{ji}$ ,  $III_E = E_{il}E_{lk}E_{ki}$

3. Określić napięcie powierzchniowe jako szczególny przypadek stanu naprężeń w ośrodku.

4. Podać równania ruchu (6.3) w przypadku kiedy pola występujące w tych równaniach zależą tylko od  $x_1, x_2$ , i  $t$ .

5. Sprecyzować równania fizyczne (7.1), kiedy pole odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  jest płaskie lub jednowymiarowe.

6. Podać izotropowe i transwersalno-izotropowe odpowiedniki równań (7.1) i (7.5).

7. Wyprowadzić równania od (7.1) do (7.6) w przypadku, kiedy pole przemieszczeń  $u_i \rightarrow u_1 = u_1(x_i, t)$  (zagadnienie warstwy) w przypadku materiału izotropowego i transwersalno-izotropowego.